



**Spolufinancováno
Evropskou unií**



Umělá inteligence ve výuce matematiky

Metodický materiál

David Nocar

Olomouc 2025

Anotace metodického materiálu: Metodický materiál se zaměřuje na využití nástrojů umělé inteligence (AI) ve výuce matematiky: představuje způsoby, jak je mohou vyučující zapojit do přípravy výuky, a rovněž ukazuje možnosti pro využití žáky či studenty jak ve výuce a přípravě na ni, tak při samostatném vzdělávání. Uvádí příklady využití AI při řešení matematických problémů, vizualizaci řešení a modelování matematických konceptů. Součástí materiálu je také základní poučení o určitých limitech umělé inteligence a možných problémech spojených s jejím využíváním. Tento materiál je určen vzdělavatelům i vzdělávaným, kteří chtějí ke vzdělávacímu procesu přistupovat inovativními metodami a využívat moderní technologie jak k řešení matematických problémů, tak k rozvoji matematické gramotnosti.

Studijní program: Metodický materiál je určen pro studenty studijních programů realizovaných na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci: *Matematika se zaměřením na vzdělávání* (bakalářský studijní program), *Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ* (navazující magisterský studijní program), popř. *Matematická gramotnost ve vzdělávání* (doktorský studijní program).

Oborová specifika: Učitelství matematiky vychází z matematických věd, které propojuje s oborovou didaktikou a pedagogikou. Matematika se zaměřuje na studium kvantitativních vztahů, struktur a prostorových forem, zahrnuje oblasti jako algebra, geometrie, analýza, statistika a aplikovaná matematika. Z didaktického hlediska se zaměřuje na metody výuky matematiky v souvislosti s objasněním různě složitých matematických konceptů, na metody řešení matematických problémů a na rozvoj matematického myšlení. Studium učitelství matematiky je v současné době interdisciplinární, neboť propojuje exaktní vědy matematiku a informatiku s pedagogikou a psychologíí. V současné době je kladen důraz na interakci mezi učitelem a žákem, motivaci žáka k učení a využívání moderních technologií ve výuce. Budoucí učitelé matematiky si během studia osvojují nejen klíčové profesní kompetence z matematických a pedagogických disciplín, ale také digitální kompetence umožňující efektivní využívání technologických nástrojů ve výuce a schopnost vytvářet atraktivní a interaktivní vzdělávací prostředí.

Požadavky na vybavení: počítač (desktop, notebook, popř. tablet), připojení k internetu, přístup k online matematickým aplikacím (např. Wolfram Alpha, Wolfram Cloud, GeoGebra, Math Solver) a nástrojům umělé inteligence (např. ChatGPT, Copilot, Gemini, ScioBot).

Metodický materiál podléhá licenci Creative Commons 4.0 ve variantě BY-SA.



Obsah

Úvodní slovo.....	4
1 Význam AI ve výuce matematiky.....	5
1.1 Přínosy a omezení AI pro učitele a žáky.....	6
1.1.1 Personalizovaná výuka.....	6
1.1.2 Okamžitá zpětná vazba.....	6
1.1.3 Automatizace rutinních úkolů.....	7
1.1.4 Vizualizace, dynamičnost a interaktivita.....	7
1.1.5 Omezení a výzvy AI ve vzdělávání.....	8
2 Úvod do generativní umělé inteligence (AI).....	11
2.1 Příklady dostupných AI nástrojů.....	11
2.1.1 ChatGPT (OpenAI).....	12
2.1.2 Copilot (Microsoft).....	12
2.1.3 Gemini (Google).....	13
2.1.4 ScioBot (SCIO).....	13
3 Nástroje pro podporu výuky matematiky.....	15
3.1 Wolfram Alpha.....	15
3.2 Wolfram Cloud.....	16
3.3 GeoGebra.....	17
4 Aplikace na vybranou úlohu.....	19
4.1 Řešení od ChatGPT.....	20
4.2 Řešení od Copilot.....	23
4.3 Řešení od Gemini.....	25
4.4 Diskuse.....	27
4.5 Ověření správnosti řešení matematickými SW.....	29
4.5.1 Řešení pomocí Wolfram Alpha.....	30
4.5.2 Řešení pomocí Wolfram Cloud.....	32
4.5.3 Řešení pomocí SW GeoGebra.....	35
Závěr.....	40
Použité a doporučené zdroje.....	41

Úvodní slovo

Milí studenti, stávající či budoucí učitelé matematiky,

dostává se vám do rukou metodický materiál, který může usnadnit začátky zapojení umělé inteligence (AI) do výuky matematiky. Vzhledem k rychlému vývoji AI nástrojů a jejich rostoucímu využívání ve vzdělávání je důležité, aby měli pedagogové určitý přehled a náměty, které jim pomohou začít tyto technologie efektivně implementovat do vzdělávacího procesu.

Tento materiál se zaměřuje na využití nástrojů umělé inteligence (AI) ve výuce matematiky. Představuje způsoby, jak může AI podpořit učitele při přípravě na výuku, ale také nabízí možnosti jejího využití žáky a studenty jak během výuky či přípravy na hodiny, tak při samostudiu. Ukazuje příklady využití AI při řešení matematických úloh, vizualizaci řešení a modelování matematických konceptů. Součástí materiálu je také základní poučení o limitech umělé inteligence a možných problémech spojených s jejím využíváním. Tento materiál je určen jak učitelům, tak studentům, kteří chtějí přistupovat ke vzdělávacímu procesu inovativními metodami a využívat moderní technologie nejen k řešení matematických problémů, ale i k rozvoji matematické gramotnosti.

AI nástroje, jako jsou ChatGPT, Copilot, Gemini, ScioBot a další, mohou výrazně zefektivnit vaši přípravu na hodiny matematiky, podpořit rozvoj matematického myšlení a dovedností žáků a zpestřit výuku. Najdete zde ukázky s popsányými prompty a následné výstupy, které vám pomohou si tyto nástroje pro konkrétní situace vyzkoušet.

Je pochopitelné, že práce s AI ve vzdělávání může vyvolávat různé otázky i obavy – jak z hlediska kvality výstupů, tak etiky jejího využití. Tyto přístupy tak nabízí prostor pro kritickou reflexi a podporují nejen rozvoj digitální gramotnosti, ale také kritického myšlení.

Cílem není vyvolávat obavy, ale naopak ukázat, že umělá inteligence nemusí být hrozbou, ale naopak užitečným nástrojem, který může obohatit vaše vzdělávání i pedagogickou praxi a přispět k rozvoji matematických i digitálních dovedností jak vašich, tak vašich žáků.

Autor

1 Význam AI ve výuce matematiky



Cíle kapitoly

Po prostudování kapitoly budou studující schopni:

- *porozumět významu umělé inteligence v matematickém vzdělávání;*
- *identifikovat přínosy AI pro podporu matematického vzdělávání;*
- *analyzovat výzvy, ale i rizika a limity AI ve vzdělávání;*
- *aplikovat principy práce s AI při řešení matematických úloh.*

Umělá inteligence (AI) přináší revoluční změny ve způsobu, jakým by se matematika mohla vyučovat a nejspíš vyučovat bude. Schopnost AI rychle poskytovat informace, analyzovat vzorce, generovat úlohy, řešit je a okamžitě poskytovat zpětnou vazbu umožňuje zcela jistě efektivnější přístup ke vzdělávání. AI může pomoci učitelům s přípravou materiálů, automatizací opravování úloh a testů a s vytvářením interaktivních vizuálních prvků, které usnadňují pochopení jinak složitých konceptů.

Jednou z největších výhod AI je její schopnost adaptivního učení – dokáže sledovat pokroky žáka a přizpůsobovat úlohy jeho individuálním potřebám. To znamená, že každý žák může postupovat svým tempem a zaměřit se na oblasti, které potřebuje zlepšit. Kromě toho může AI poskytnout vysvětlení problému různými způsoby a ukázat dílčí kroky při řešení problému, což podporuje hlubší porozumění použitému matematickému aparátu, a tudíž matematice.

Dalším významným přínosem AI v matematickém vzdělávání je její schopnost podporovat kreativitu a experimentování ve výuce. Tento přístup koresponduje s konstruktivistickým pojetím vzdělávacího procesu a konkrétně podporuje metody badatelsky orientované výuky. Nástroje jako GeoGebra nebo Wolfram Alpha (či další nástroje od Wolfram Research) umožňují studentům vizualizovat matematické problémy, interaktivně do nich zasahovat a objevovat nové přístupy k jejich řešení.

Přestože AI nabízí mnoho výhod, je důležité ji využívat uvážlivě a kombinovat ji s tradičními výukovými metodami. Učitelé by měli být vedeni k tomu, aby AI chápali jako nástroj, který doplňuje jejich práci, nikoli jako náhradu za jejich vlastní pedagogický přístup. Žáci či studenti by měli být obeznámeni s tím, že tyto nástroje nejsou neomylné, a neměli by slepě přijímat generované výstupy. S touto problematikou souvisí více než kdy jindy proces uplatňování kritického myšlení.

Otevírá se tak větší prostor pro přístup označovaný jako „Computer-based mathematics teaching“, prezentovaný Conradem Wolframem (2020), v němž se již neklade důraz jen na samotný matematický výpočet (ten by se měl svěřit výpočetní

technice), ale na symbiózu všech čtyř kroků, které by mělo řešení problému obsahovat:

1. „umění“ správně položit otázky mající původ v reálném světě kolem nás,
2. ty pak transformovat do jednoznačně definovaných (matematických) formulí,
3. následně je na axiomatickém základě vyřešit,
4. toto formální řešení transformovat zpět do reálného světa a tady jej verifikovat.

V souvislosti s AI je tedy důležité problém dobře formulovat (dávat nástrojům AI vhodné a přesné prompty), aby byl správně pochopen a zmatematizován, následně vyřešen a aby bylo předloženo řešení; žák by měl být schopen výsledek správně interpretovat, popř. i umět ověřit.

1.1 Přínosy a omezení AI pro učitele a žáky

1.1.1 Personalizovaná výuka

AI dokáže přizpůsobit vzdělávací obsah a výuku individuálním potřebám žáků a nastavit úroveň obtížnosti podle jejich pokroku. AI může podle dílčích kroků a pokroku žáka na základě ověření výsledků vzdělávání analyzovat jeho silné a slabé stránky a v závislosti na jeho výkonu mu doporučit cestu a konkrétní materiály, které podpoří rozvoj jeho dovedností v dané problematice.

AI tak může fungovat na podobném principu jako asistent pedagoga v případě žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. AI může představovat osobního asistenta každého žáka, provádět ho učivem jeho vlastním tempem a přizpůsobovat úroveň obtížnosti jeho výkonu a pokroku ve studiu. Takové možnosti ale většinou nabízí placené verze AI nástrojů, popř. si učitel může takového AI asistenta sám „naprogramovat“ neboli naučit konkrétního chatbota specificky se žáky komunikovat.

1.1.2 Okamžitá zpětná vazba

AI poskytuje žákům okamžité vysvětlení daného problému a vyhodnocení při řešení úloh či testování, což urychluje proces učení. Zpětná vazba hraje klíčovou roli v procesu učení a s využitím AI může být okamžitá. Tato okamžitá interakce mezi dotazy žáka, výstupy AI, řešením žáka a ověřením správnosti zvyšuje nejen pochopení učiva žákem, ale i jeho motivaci k získávání dalších poznatků a snižuje jeho frustraci při učení.

Pro učitele přináší okamžitá zpětná vazba zajišťovaná AI významnou úsporu času, protože se snižuje nutnost ručně opravovat řešení úloh či testy a následně vysvětlovat chyby a problematické oblasti individuálně každému žákovi. Současně se díky zvýšené motivaci a menší frustraci žáků vytváří příznivé prostředí pro výuku, což

napomáhá učitelům lépe sledovat celkový pokrok třídy a reagovat na její specifické potřeby.

1.1.3 Automatizace rutinních úkolů

Automatizace rutinních úkolů ve vzdělávacím procesu pomocí umělé inteligence výrazně usnadňuje práci učitelů a optimalizuje jejich časové možnosti. Díky AI mohou pedagogové delegovat časově náročné činnosti jako opravování testů nebo vytváření pracovních listů na tyto technologie. Kompletní přípravy na hodiny lze generovat např. na platformě ScioBot. Učitel zadá téma hodiny a příslušný ročník a ScioBot navrhne cíle hodiny a vygeneruje kompletní přípravu na dané téma (aktivity, pracovní listy, náměty na samostatnou práci a řadu dalších inspirativních zdrojů).

Tyto nástroje zajišťují objektivitu, diferenciaci a rychlost zpracování, čímž šetří čas vyučujícímu, který se tak může více věnovat práci se žáky. AI dokáže přizpůsobit připravované materiály specifickým požadavkům dané skupiny žáků nebo jednotlivce, pro vyučujícího by taková diferenciaci představovala mnohem větší časovou zátěž. Využití AI tímto způsobem představuje efektivní kombinaci technologických možností a osobního přístupu učitele, což přináší komplexní podporu vzdělávacího procesu a snižuje pracovní zátěž učitele.

1.1.4 Vizualizace, dynamičnost a interaktivita

Vizualizace, dynamičnost a interaktivita jsou klíčové prvky moderní výuky matematiky, které přinášejí nástroje jako GeoGebra nebo Desmos. Tyto platformy umožňují učitelům i žákům vytvářet vizuální reprezentace různých matematických konceptů (geometrické útvary a polohové a metrické vztahy mezi nimi, průběhy funkcí, modelování pravděpodobnostních jevů apod.), díky čemuž je možné lépe porozumět i složitějším pojmům a teoriím. Grafy funkcí, geometrické útvary nebo dynamické simulace jsou pomocí těchto nástrojů nejen snadno vizualizovatelné, ale také interaktivní – učitel i žák mohou měnit vstupní parametry či manipulovat se vstupními prvky a pozorovat okamžité změny výsledků. Tyto možnosti poskytují žákům nejen větší míru kontroly nad učením a řešením různých matematických problémů, ale také usnadňují pochopení základních principů a souvislostí.

Díky nástrojům AI mohou žáci experimentovat s různými postupy a způsoby řešení, což podporuje jejich kreativní myšlení. Tento induktivní postup objevování vzorců, vztahů a zákonitostí je při budování nových poznatků náročnější než postup deduktivní. Závěry tohoto induktivního přístupu nemusejí být vždy správné, neboť zobecnění vychází z omezeného počtu případů. Interaktivní a dynamické systémy ale mnohonásobně zvyšují množství analyzovaných případů, a tudíž i míru spolehlivosti formulovaných závěrů. Na rozdíl od spolehlivějších deduktivních postupů zvyšuje induktivní přístup k budování matematických poznatků zapojení

žáků a také zapamatovatelnost nových poznatků. Vzájemná kombinace vizualizace a interaktivity tedy představuje takové prvky řešení matematických problémů, které jsou pro žáky motivační a efektivní pro budování nových poznatků. Nástroje jako GeoGebra či Desmos tak představují ideální podporu pro výuku matematiky.

Podobně mohou fungovat i nástroje od Wolfram Research: Wolfram Alpha, Wolfram Cloud (ty náležejí do skupiny programů CAS – Computer Algebra Systems, které jsou určeny spíše k symbolickým a numerickým výpočtům, ale také disponují nástroji pro vizualizaci, grafické zpracování, apod.), nicméně v tomto případě je to trochu náročnější kvůli nutným porozuměním určité specifické syntaxi zadávání požadavků příslušnému programu. S tím ovšem mohou pomoci AI nástroje, kterým zadáme vhodné prompty, a ony nám naformulují dotazy ve správné syntaxi. Jako ideální pro řešení složitějších matematických problémů se dnes jeví symbióza sofistikovanějších matematických softwarů a nástrojů umělé inteligence.

1.1.5 Omezení a výzvy AI ve vzdělávání

Je pochopitelné, že práce s AI ve vzdělávání může vyvolávat i různé obavy. Např. v úvodu jsme uvedli, že tento přístup nabízí prostor pro kritickou reflexi a podporuje nejen rozvoj digitální gramotnosti, ale i kritického myšlení. Nicméně nadměrné spoléhání se na umělou inteligenci může vést časem k oslabení kritického myšlení a schopnosti žáků samostatně analyzovat a řešit problémy. Pokud budou žáci automaticky přijímat odpovědi generované AI bez jejich ověření, mohou začít ztrácet dovednosti, jako jsou logické uvažování, kreativní přístup k úkolům a schopnost orientovat se samostatně v daných problémech a následně v neznámých situacích. Tato pasivní závislost může oslabit jejich intelektuální zvědavost a motivaci hledat vlastní cesty k porozumění danému problému. AI by proto měla být vnímána pouze jako nástroj podpory ve vzdělávání, nikoli náhrada vzdělávacího procesu.

Z hlediska matematického, a tudíž i z hlediska výuky matematiky s podporou AI nás určitě napadne otázka, zda tyto nástroje umí řešit matematické úlohy vždy matematicky korektně, ať již zadané přímo matematickým aparátem, nebo jako slovní úlohy, které si AI musí nejprve správně zmatematizovat. To již bylo ukázáno např. na jedné úloze v článku Bártek a kol. (2024). Různé nástroje AI jsou různě spolehlivé v této problematice a není jednoduché si vybrat vždy ten nejlepší. To by u každého typu problému vyžadovalo vždy provést určitou analýzu, čímž bychom ztratili hlavní výhodu užívání AI, a to rychlost řešení a zpětné vazby, jednoduše řečeno bychom přišli o úsporu času. Chyby a nepřesnosti při využívání umělé inteligence v matematice vycházejí z jejího způsobu fungování a omezené schopnosti rozpoznat kontext nebo určité drobné, ale důležité nuance některých úkolů. I když je AI velmi užitečná při výpočtech a analýzách, může poskytovat nesprávné odpovědi, například kvůli špatně pochopeným zadaným údajům nebo chybám v tréninkových datech, na nichž byla založena. Tyto chyby mohou zahrnovat

nevhodné interpretace matematických pojmů, špatně aplikované vzorce nebo přehlížení specifických podmínek daného problému. Učitelé i žáci by si proto měli výsledky AI pečlivě ověřovat a brát v úvahu, že AI nepřemýšlí jako člověk, nýbrž pracuje s pravděpodobnostními modely. Přes všechny své výhody nemůže AI nahradit lidský úsudek, kritické myšlení a hluboké matematické pochopení, které jsou klíčové pro správné vyřešení komplexních problémů. Jednodušší to mají vědní disciplíny založené na informacích, které stačí dohledat a interpretovat. Pro řešení matematických problémů je potřeba problému správně porozumět, zmatematizovat jej, dohledat příslušný matematický aparát, správně jej aplikovat a řešení správně interpretovat. Ne všechny matematické problémy byly vyřešeny a lze dohledat jejich řešení. I stejný, známý a mnohokrát vyřešený problém lze naformulovat zcela nově a jinak, čímž vznikne nová matematická úloha, ke které nelze dohledat hotové řešení, ale musí se buď pochopit princip, nebo dohledat podobné úlohy na stejném principu a analogicky aplikovat příslušný matematický aparát. Matematika to bude mít nejspíš vždy těžší než ostatní disciplíny, ale to může ovlivňovat mnohé, neboť mnohé je na matematice založeno.

S využíváním AI může být z principu fungování automaticky spojena určitá technologická bariéra. Zásadním požadavkem k využívání AI je nutný přístup k technologiím, jako jsou internet a počítač či tablet nebo mobilní telefon. Určitě ještě ani dnes (psáno v roce 2025) nemají všichni učitelé a žáci stejný přístup k těmto moderním technologiím a nástrojům. To může být způsobeno omezenými finančními prostředky škol, nedostatečnou infrastrukturou (omezený přístup k internetu, málo výkonná zařízení, popř. nedostatečná technická podpora) a absencí vzdělávání či vyškolení v oblasti použití těchto nástrojů. Učitelé a studenti v méně vybavených školách tak mohou zaostávat v tomto fenoménu za těmi, kteří již mají možnost využívat pokročilé AI nástroje. To může vést k prohloubení vzdělávací nerovnosti mezi různými regiony nebo sociálními skupinami. Pro překonání této bariéry je nutné zvyšovat dostupnost moderních technologií, investovat do infrastruktury a zároveň podporovat vzdělávání učitelů v oblasti využívání moderních technologií včetně AI.

Do budoucna se lze obávat určité závislosti na technologiích při využívání AI v matematice, což může mít za následek oslabení schopnosti jak učitelů, tak žáků řešit matematické problémy a úkoly bez této podpory. Nadměrné spoléhání se na AI může způsobit, že se vytratí dovednost samostatného logického uvažování, schopnost manuálních výpočtů bez výpočetní techniky nebo porozumění základním konceptům, protože si zvykneme na to, že technologie nám poskytují snadno a rychle odpovědi na jakékoliv problémy. To by mohlo ovlivnit nejen praktické dovednosti, ale i hlubší pochopení matematiky, což je zásadní pro rozvoj logického usuzování či analytického myšlení. Aby se předešlo těmto negativním dopadům, je důležité najít určitou rovnováhu mezi využíváním AI jako nástroje pro podporu a zachováním tradičních metod výuky, které žákům i učitelům umožní udržet si nezávislost a schopnost zvládat řešit matematické problémy i bez těchto technologií.

Na závěr si dovolím zmínit i určité etické otázky, které jistě každého v této souvislosti napadnou. Zneužití umělé inteligence – a to nejen v matematickém vzdělávání – představuje určitý problém, zejména pokud jde o možnost podvádění při testech či domácích úlohách. S rostoucí dostupností nástrojů AI se otevírá prostor i pro jejich neetické využití žáky. Ti si mohou nechat generovat výsledky či řešení úloh bez jakéhokoliv vlastního přemýšlení a porozumění, což možná není ani tak neetické jako spíš protichůdné vzdělávacím cílům. Nechci generalizovat, ale určitě se část žákovské populace staví k základnímu vzdělávání jako k nutnosti, kterou musí absolvovat a takovou skupinu určitě netrápí, že určitým neetickým jednáním, kterým si věci zjednoduší, snižují své schopnosti řešit problémy, logicky uvažovat, samostatně pracovat apod., tedy to, na co je má vzdělávací proces připravit. Tento problém může negativně ovlivnit nejen jejich rozvoj, ale i spravedlivé hodnocení výkonu žáků. Aby se tomuto zneužití předcházelo, je nezbytné vést žáky k určité etice vzdělávacího procesu, zavádět vhodná preventivní opatření a učit žáky odpovědnosti a významu vlastní práce v procesu učení.



Otázky k zamyšlení:

- *Jaké jsou konkrétní možnosti zapojení AI do matematického vzdělávání?*
- *Jak AI ovlivní výuku po stránce řízení vzdělávacího procesu? (Změní se role učitele? Jaké kompetence bude do budoucna učitel potřebovat a rozvíjet?)*
- *Ovlivní zapojení AI do výuky způsob hodnocení výkonu žáka/studenta?*
- *Mají nástroje AI dostatečný potenciál zlepšit porozumění matematickým konceptům u žáků/studentů?*
- *Lze zamezit zneužívání AI při ověřování výsledků vzdělávání či samostatných (domácích) pracích?*
- *Mělo by se vzdělávání a vzdělávací obsah přizpůsobovat možnostem AI?*



Úlohy k procvičování:

- *Zamyslete se nad získanými poznatky a zkuste si v konfrontaci s vlastními zkušenostmi zformulovat pozitiva a negativa AI v matematickém vzdělávání.*
- *Představte si, že jste učitel a navrhnete si přípravu na výuku se zapojením AI. (pro různé fáze výuky: motivace, nové učivo, opakování, procvičování apod.)*

2 Úvod do generativní umělé inteligence (AI)



Cíle kapitoly

Po prostudování kapitoly budou studující schopni:

- *porozumět pojmu a principu generativní umělé inteligence (AI);*
- *charakterizovat nejběžnější dostupné AI nástroje;*
- *zhodnotit důležitost přesného zadávání instrukcí (promptů) nástrojům AI;*
- *kriticky posoudit spolehlivost výstupů AI a osvojit si potřebu ověřování získaných výstupů.*

Generativní umělá inteligence (AI) je typ umělé inteligence, která dokáže tvořit (generovat) nové obsahy, například texty, obrázky, hudbu nebo kód. V oblasti matematiky se využívá zejména k automatizaci výpočtů, generování úloh, poskytování vysvětlení matematických konceptů a vizualizaci matematických pojmů.

Tyto modely fungují na základě velkých jazykových modelů (LLM) a neuronových sítí, které analyzují obrovské množství dat, na jejichž základě generují nejpravděpodobnější, a tudíž nejrelevantnější odpovědi. AI dokáže pracovat nejen s jednoduchými výpočty, ale i s pokročilými matematickými koncepty, jako jsou diferenciální rovnice nebo statistické analýzy.

Důležitou součástí práce s AI je zadávání správných instrukcí (promptů), které ovlivňují kvalitu výstupu. Čím přesněji je otázka nebo požadavek formulován, tím lepší odpověď AI poskytne. V matematice ovšem na tuto přesnost nahlížíme často jen binárně. Očekáváme-li jednoznačný výsledek, těžko můžeme dostávat výsledky lepší nebo horší. Buď dostaneme správný výsledek, nebo špatný výsledek. Použijeme-li nástroje AI k řešení úlohy, přesnost formulace promptu tedy ovlivňuje získání správného výsledku.

2.1 Příklady dostupných AI nástrojů

Současné digitální technologie již nabízí širokou škálu AI nástrojů, které mohou učitelé i studenti či žáci využít při výuce matematiky. Každý z těchto nástrojů má své specifické vlastnosti a využití, a tudíž i rozdílnou spolehlivost, jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole s odkazem na článek K. Bárta (2024). Níže je uveden přehled nejběžnějších AI nástrojů vhodných i pro podporu výuky matematiky:

2.1.1 ChatGPT (OpenAI)

Funkce: Generování odpovědí na matematické otázky, jako jsou vysvětlení pojmů či vyhledání definice, analýza problémů, řešení úloh včetně postupu krok za krokem nebo pomoc s formulacemi matematických textů.

Využití: Může pomoci vyučujícím při přípravě na výuku, generuje pracovní listy, testové otázky a umí vysvětlit matematické pojmy s různými úrovněmi obtížnosti např. s přihlédnutím k věku žáka. Žáci si také mohou generovat sady úloh na procvičování.

Výhody: Přizpůsobivost odpovědí, možnost personalizace na základě požadavků uživatele, schopnost generování obsahu pro různé úrovně obtížnosti.

Omezení: Někdy může poskytovat nepřesné postupy či chybné výsledky, zejména pokud jde o komplikovanější problémy, proto je nutné si výstupy ověřovat, aby se předešlo přijímání chybných výsledků.

Dostupné z: <https://chatgpt.com/>

2.1.2 Copilot (Microsoft)

Funkce: Poskytuje podobně jako ostatní chatboti odpovědi na širokou škálu otázek včetně matematických, vysvětluje pojmy, analyzuje problémy, taktéž umí připravit pracovní listy, řešit matematické úlohy včetně vysvětlení dílčích kroků a doporučuje se častěji pro asistenci psaní kódů pro různé programovací jazyky.

Využití: Učitelům může pomoci s přípravou na výuku a s tvorbou testů, studentům s pochopením složitějších matematických konceptů či s procvičováním. Při užívání složitějších matematických softwarů je dobrým asistentem při generování kódu dle požadované syntaxe.

Výhody: Přizpůsobivost odpovědí na základě konkrétních požadavků, např. na základě věku či různé výchozí úrovně znalostí. Rychlé generování kódů pro různé programy a programovací jazyky.

Omezení: Občas může generovat kód, který není plně kompatibilní s konkrétními požadavky. Může mít problémy s kontextem, pokud je úkol složitý nebo vyžaduje hlubší porozumění.

Dostupné z: <https://copilot.microsoft.com/>

2.1.3 Gemini (Google)

Funkce: AI Gemini je pokročilá umělá inteligence navržená k podpoře uživatelů při psaní, plánování, studiu apod. Hlavní výhodou je pro uživatele nástrojů společnosti Google, neboť Gemini AI je integrována do různých aplikací Google. Stejně jako předchozí nástroje umí vysvětlit matematické pojmy, řešit matematické úlohy včetně podrobných postupů, generovat testy a připravovat pracovní listy.

Využití: Vyučujícímu nabízí možnost generovat pracovní listy, testy, kvízy. Žákovi může vysvětlit složitější pojmy různými způsoby i úrovněmi náročnosti. Jak pro učitele, tak pro žáka může poskytovat zpětnou vazbu analýzou pokroku žáka při ověřování znalostí, řešení úloh či testování.

Výhody: Integrace do Google aplikací, což zjednodušuje využití funkcí AI přímo v prostředí známých nástrojů. Využívá svých multimodálních schopností, což znamená, že dokáže zpracovávat a pracovat s různými formáty dat, jako jsou texty, obrázky či další typy informací. Gemini nabízí vysokou úroveň přizpůsobení a přesnosti a přesnost je pro matematiku prioritou, takže jde nejspíš o nejvhodnější nástroj pro podporu výuky matematiky.

Omezení: Stejně jako u ostatních nástrojů se může stát, že může mít problémy s interpretací specifických složitých úloh, které vyžadují hlubší kontext. Při používání Gemini jsou shromažďovány údaje o konverzacích, poloze a dalších aspektech, což může být pro některé uživatele znepokojující.

Dostupné z: <https://gemini.google.com/>

2.1.4 ScioBot (SCIO)

Funkce: ScioBot je nástroj umělé inteligence vyvinutý společností Scio, který je zaměřen na podporu učitelů při přípravě na výuku. Dokáže generovat kompletní přípravy na hodiny včetně cílů, obsahu výuky, metod a aktivit pro žáky přizpůsobených konkrétnímu tématu a věku žáků.

Využití: ScioBot je ideální pro učitele, kteří si chtějí rychle a efektivně generovat přípravy na hodiny. Umožňuje vytvářet pracovní listy, návrhy aktivit a další materiály, jež lze snadno upravit podle individuálních potřeb.

Výhody: Umožňuje učitelům šetřit čas díky rychlému generování kvalitních příprav na hodiny. Nabízí přizpůsobitelnost a flexibilitu a umožňuje upravovat vygenerované formulace či přidávat vlastní poznámky. Matematické výrazy jsou generované pomocí LaTeXu a pro další doplnění lze využít editor s LaTeX klávesnicí. Díky ušetřenému času se může učitel více věnovat jiným aktivitám a žákům.

Omezení: ScioBot je zaměřen především na přípravu na výuku, takže jeho využití mimo tento rámec může být omezené, ale k tomu jsou zde i jiné nástroje.

Dostupné z: <https://sciobot.cz/>



Otázky k zamyšlení:

- *Jaký je rozdíl mezi generativní AI a jinými formami umělé inteligence?*
- *Jak může přesnost zadání (promptu) ovlivnit výstup generovaný AI?*
- *Který z představených AI nástrojů je vhodný pro jaké účely?*
- *Jaké dovednosti bych si měl/a osvojit, abych mohl/a efektivně využívat nástroje AI v matematice?*



Úlohy k procvičování:

- *Stručně vysvětlíte pojem generativní AI a uveďte několik námětů na efektivní zapojení AI do výuky matematiky.*
- *Navrhněte konkrétní matematický problém a zkuste použít různě přesné formulace promptu v některém vybraném nástroji AI. Začněte co nejobecněji a následně formulaci promptu zpřesňujte. Sledujte, jak se liší generované výstupy.*
- *Na různě složitých úlohách si zkuste otestovat představené nástroje AI. Ověřte správnost generovaných výstupů vlastním výpočtem či užitím matematického SW. Vyhodnoťte si, jestli je některý z nástrojů spolehlivější než jiný.*
- *Zvolte si téma a otestujte si, které nástroje jsou vhodnější pro přípravu sady příkladů na procvičení, pracovních listů nebo komplexní přípravu na výuku daného tématu.*

3 Nástroje pro podporu výuky matematiky



Cíle kapitoly

Po prostudování kapitoly budou studující schopni:

- *identifikovat vhodné online nástroje pro podporu výuky matematiky;*
- *využívat online nástroje poháněné umělou inteligencí (Wolfram Alpha, Wolfram Cloud, GeoGebra);*
- *charakterizovat uvedené nástroje a možnosti jejich aplikace pro matematické výpočty a vizualizace.*

Pro podporu výuky matematiky existuje celá řada nástrojů, ať již specifické softwary, které je potřeba instalovat do PC (např. MatLab, Wolfram Mathematica, GeoGebra apod.), nebo dnes již nespočet různých online nástrojů. Pro online podporu výuky matematiky lze použít velké množství webových stránek s matematickým obsahem nebo podle úrovně obsahu učiva i stránky různých ZŠ, SŠ, VŠ. Kromě těchto webů s textovými či grafickými informacemi existuje řada webů s výukovými videozáznamy (např. Khan Academy, isibalo), ale v souvislosti s AI se jedná především o takové nástroje, které bychom mohli označit jako matematické nástroje poháněné umělou inteligencí. Tyto online nástroje kombinují symbolickou a numerickou matematiku s AI, strojovým učením a vizualizačními technologiemi a slouží k výpočtům, řešení úloh, porozumění různým matematickým konceptům či vizualizacím. Některé slouží k méně náročným analýzám, jiné umí řešit složité matematické problémy, další slouží k vizualizacím a vykreslování grafů, některým je možné zadávat vstupy prostřednictvím objektivu fotoaparátu mobilního telefonu, tabletu či skenu a některé umí rozpoznávat i rukou psaný vstup. Tyto nástroje výrazně rozšiřují možnosti matematického vzdělávání všude tam, kde je dostupné internetové připojení. Z těchto online nástrojů lze jmenovat např. Wolfram Alpha, Wolfram Cloud, GeoGebra, MathSolver, Symbolab, Desmos či PhotoMath. Některé z nich si představíme.

3.1 Wolfram Alpha

Wolfram Alpha je výpočetní znalostní engine (tj. kombinuje informace z databází, analyzuje je a provádí na nich požadované výpočty) vyvinutý společností Wolfram Research. Na rozdíl od tradičních vyhledávačů tedy neprovádí indexaci obsahu webových stránek, aby dodal požadovanou odpověď, ale na dotazy odpovídá prostřednictvím výpočtů a analýzy dat z rozsáhlé databáze strukturovaných poznatků. Umožňuje uživatelům pokládat dotazy v přirozeném jazyce (bohužel ne

česky, nejlépe v angličtině) a poskytuje přesné, kurátorované odpovědi (tj. odpovědi generované na základě rozsáhlé znalostní databáze a algoritmů, které jsou spravovány a ověřovány odborníky). Tento nástroj je obzvláště užitečný v matematice, technice, statistice, ekonomii či geografii a lze jej využít k řešení rovnic, tvorbě grafů, analýze dat nebo vyhledávání faktů. Jeho výhodou je schopnost nejen zodpovídat faktické dotazy, ale i poskytovat postupy řešení a vizualizace. Díky těmto vlastnostem je cenným nástrojem nejen pro studenty matematiky. Vaško a kol. (2021) uvádí možnosti jeho využití již od 1. stupně základní školy a zadávání dotazů v anglickém jazyce považuje i za určitý přínos v rámci mezipředmětových vztahů či aplikace metody CLIL do výuky.

Wolfram Alpha je nástroj volně dostupný online bez jakékoliv registrace, ale generované výstupy jsou omezené. Dostanete řešení, ale budete-li chtít podrobněji dílčí kroky řešení (step-by-step solution), musíte přejít na placenou verzi Wolfram Alpha Pro.

Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/>

3.2 Wolfram Cloud

Wolfram Cloud je cloudová platforma společnosti Wolfram Research, která umožňuje spouštět aplikace v jazyce Wolfram Language přímo ve webovém prohlížeči. Funguje jako online pracovní prostředí, v němž lze provádět výpočty, analyzovat data, vytvářet vizualizace či budovat interaktivní aplikace bez nutnosti instalace softwaru do PC (jako je tomu u Wolfram Mathematica). Uživatelé mohou své projekty snadno sdílet a spolupracovat v reálném čase, převádět kódy na webové aplikace a škálovat je podle potřeby. Platforma je úzce propojena s dalšími produkty Wolfram Research, jako jsou Wolfram Mathematica a Wolfram Alpha, což poskytuje okamžitý přístup k rozsáhlé znalostní databázi a pokročilým algoritmům. Mezi hlavní využití patří vývoj interaktivních aplikací, analýza dat, statistické výpočty, vědecký výzkum či výuka a experimentování s Wolfram Language. Díky své flexibilitě a výpočetnímu výkonu je Wolfram Cloud ideální pro vývojáře, vědce, studenty i pedagogy, kteří chtějí efektivně pracovat s výpočty a daty v cloudovém prostředí. Určitým omezením u tohoto silného nástroje je znalost specifického jazyka Wolfram Language. Zde přichází na řadu AI, která zná i tento jazyk a pomůže vám na základě správných promptů připravit potřebný kód ve Wolfram Language. Největší síla AI v matematice není v její autonomii, neboť zatím neumí sama vždy vyřešit zadaný matematický problém, ale v symbióze AI a sofistikovaných matematických nástrojů.

Na rozdíl od Wolfram Alpha není Wolfram Cloud volně přístupný bez registrace. Nejprve si musíte založit svůj účet (Wolfram account), čímž získáte své Wolfram ID, jehož prostřednictvím se do Wolfram Cloud můžete přihlásit. Pro bezplatné užívání

získáte s určitými omezeními plán Basic. Rozšířené možnosti získáte s placenými plány Online Mathematica, Premium či Premium Plus.

Dostupné z: <https://www.wolframcloud.com/>

3.3 GeoGebra

GeoGebra je bezplatný interaktivní matematický software ze skupiny dynamických geometrií určený pro všechny úrovně vzdělávání, který kombinuje geometrii, algebru, tabulkový kalkulátor, grafy, statistiku a infinitezimální počet v jednom dynamickém prostředí. Jeho hlavní předností je možnost vizualizovat matematické koncepty a propojovat různé oblasti matematiky, což usnadňuje učení i výuku. Uživatelé mohou vytvářet geometrické objekty a manipulovat s nimi, řešit rovnice, kreslit grafy funkcí, analyzovat data nebo provádět symbolické výpočty. Software podporuje i pokročilé funkce, jako jsou 3D grafika, skriptování či funkce počítačových algebraických systémů (CAS). Wossala (2023) poukazuje i na další aktuální trend aplikovaný do vzdělávacího procesu, který GeoGebra také podporuje, a tím je využití rozšířené reality. GeoGebra je multiplatformní a dostupná jako webová aplikace, desktopový software pro Windows, macOS a Linux i mobilní aplikace pro Android a iOS. Nabízí rozsáhlou online knihovnu výukových materiálů vytvořených komunitou uživatelů a umožňuje vytvářet interaktivní cvičení či testy. Díky své intuitivnosti a širokým možnostem se GeoGebra stala jedním z nejpoužívanějších nástrojů pro matematické vzdělávání od základních škol až po univerzitní úroveň.

Dostupné z: <https://www.geogebra.org/>



Otázky k zamyšlení:

- *K jakým účelům jsou vhodné představené nástroje? Liší se svými možnostmi podpory výuky matematiky? Mají stejný aparát a mohou být použity k řešení stejných problémů, nebo jsou specificky zaměřené, a tudíž i jejich užití je specifické?*
- *Které z uvedených nástrojů lze použít k vysvětlení matematických konceptů, které k řešení konkrétního matematického problému, které k samostatnému bádání a vyvozování zobecněných závěrů a které k vizualizaci?*
- *Je vždy vhodné řešit daný problém jedním vytipovaný nástrojem, který by mohl být shledán jako nejefektivnější, nebo je přínosná i kombinace více nástrojů aplikovaných na stejný problém?*



Úlohy k procvičování:

- Seznamte se s prostředím online matematických SW Wolfram Alpha, Wolfram Cloud a GeoGebra.
- Vyhledejte nebo naformulujte nějakou konkrétní zajímavou matematickou úlohu a řešte ji pomocí uvedených matematických SW.
- Při řešení v těchto SW je vyžadována specifická syntax, proto se nebojte využívat nástrojů AI, aby vám pomohly příkazy správně formulovat.
- Zadejte požadavek na kompletní řešení téže úlohy vybraným nástrojům AI. Výsledky porovnejte s předchozími výsledky matematických SW.
- Formulujte si závěry typu: Jak vám nástroje AI pomohly při řešení úlohy matematickými SW? K jakému řešení došly nástroj AI? Může mít řešení nástroji AI nějaké limity oproti matematickým SW?

4 Aplikace na vybranou úlohu



Cíle kapitoly

Po prostudování kapitoly budou studující schopni:

- aplikovat nástroje umělé inteligence na řešení matematických úloh (konkrétně byla zvolena úloha z analytické geometrie);
- provádět analýzu a porovnání výstupů od různých AI nástrojů;
- uplatnit různé matematické aparáty pomoci návrhů AI;
- verifikovat správnost řešení vhodnými matematickými SW;
- provádět vizualizace matematických úloh v součinnosti s AI.

Využití výše uvedených nástrojů budeme aplikovat na následující úlohu. Porovnáme výstupy generované ChatGPT, Copilot a Gemini. Provedeme diskusi nad dodanými výstupy (řešením úlohy) a řešení ověříme zmíněnými nástroji Wolfram Alpha a Wolfram Cloud a vizualizaci provedeme pomoci GeoGebry.

Zadání úlohy:

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α .

$$p: x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Vhodnými nástroji proveďte vizualizaci tohoto případu.

Při řešení takové úlohy můžete i pomocí AI postupovat různými kroky. Chcete-li mít jistotu, že řešení se ubírá správnou cestou (i když cest k řešení vždy vede víc, ale vy chcete např. určitou konkrétní), zadáváte prompty postupně, nástroj danou cestou vedete a on jen provádí dílčí úkony – konkrétní výpočty. Můžete ale také celý problém předat stručně jedním promptem a nechat vše na vybraném nástroji, ať sám zvolí cestu, jakou bude problém řešit. V takovém případě by prompt pro naši úlohu vypadal následovně:

„Urči vzájemnou polohu přímky p a roviny α .“

$$p: x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

4.1 Řešení od ChatGPT

Abychom určili vzájemnou polohu přímky p a roviny α , musíme provést několik kroků:

1. Parametrická rovnice přímky

Máme dané dvě rovnice přímky p :

$$x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

Nejprve tyto dvě rovnice přetvoříme na parametrické vyjádření přímky.

Z první rovnice můžeme vyjádřit x jako funkci y a z :

$$x = -2y + z - 5$$

Nyní tuto hodnotu x dosadíme do druhé rovnice:

$$3(-2y + z - 5) - y + 2z - 2 = 0$$

Po úpravě dostaneme:

$$-6y + 3z - 15 - y + 2z - 2 = 0$$

$$-7y + 5z - 17 = 0$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit y v závislosti na z :

$$y = \frac{5z - 17}{7}$$

Nyní máme:

$$x = -2y + z - 5$$

$$y = \frac{5z - 17}{7}$$

A nakonec dosadíme hodnotu y do x :

$$x = -2\left(\frac{5z - 17}{7}\right) + z - 5$$

Po úpravě dostaneme:

$$x = \frac{-10z + 34}{7} + z - 5$$

$$x = \frac{-10z + 34 + 7z - 35}{7}$$

$$x = \frac{-3z - 1}{7}$$

Takže máme parametrické vyjádření přímky p :

$$x = \frac{-3z - 1}{7}, \quad y = \frac{5z - 17}{7}, \quad z = z$$

Toto parametrické vyjádření přímky je:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-3z - 1}{7}, \frac{5z - 17}{7}, z\right)$$

Kde z je parametr.

2. Určení vzájemné polohy přímky p a roviny α

Rovina α je dána rovnicí:

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$

Pro určení vzájemné polohy přímky a roviny zkontrolujeme, zda přímka leží v rovině, je rovnoběžná s rovinou, nebo ji protíná.

2.1 Dosazení parametrického vyjádření přímky do rovnice roviny

Dosadíme parametrické vyjádření přímky do rovnice roviny α :

$$2\left(\frac{-3z - 1}{7}\right) - 3\left(\frac{5z - 17}{7}\right) + z - 5 = 0$$

Nyní provedme úpravy:

$$\frac{-6z - 2}{7} - \frac{15z - 51}{7} + z - 5 = 0$$

$$\frac{-6z - 2 - 15z + 51}{7} + z - 5 = 0$$

$$\frac{-21z + 49}{7} + z - 5 = 0$$

$$-21z + 49 + 7z - 35 = 0$$

$$-14z + 14 = 0$$

$$z = 1$$

2.2 Určení bodu přímky

Nyní, když máme $z = 1$, dosadíme tuto hodnotu do parametrického vyjádření přímky:

$$x = \frac{-3(1) - 1}{7} = \frac{-3 - 1}{7} = \frac{-4}{7}$$

$$y = \frac{5(1) - 17}{7} = \frac{5 - 17}{7} = \frac{-12}{7}$$

Takže bod na přímce, který leží v rovině, má souřadnice:

$$\left(\frac{-4}{7}, \frac{-12}{7}, 1\right)$$

3. Závěr: Vzájemná poloha

Přímka p a rovina α se protínají v jednom bodě $\left(\frac{-4}{7}, \frac{-12}{7}, 1\right)$.

ChatGPT úlohu vyřešil korektním způsobem metodou hledání společných bodů (jen musíme pominout některé odlišnosti ve vyjadřování oproti našim zvyklostem a taktéž určité drobné jazykové nesrovnalosti), ale dle užitého matematického aparátu bychom mohli očekávat správný výsledek (za předpokladu, že daný aparát byl správně a bezchybně aplikován).

Nyní se podíváme, jak danou úlohu dle stejného promptu vyřeší Copilot.

4.2 Řešení od Copilot

Abychom určili vzájemnou polohu přímky p a roviny α , postupujeme následovně:

Přímka p je určena soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}x + 2y - z + 5 &= 0 \\3x - y + 2z - 2 &= 0\end{aligned}$$

Rovina α je dána rovnicí:

$$2x - 3y + z - 5 = 0.$$

Krok 1: Parametrické vyjádření přímky p

Začneme hledáním parametrického vyjádření přímky p . Řešíme soustavu dvou rovnic pro dvě proměnné a jednu volnou, kterou označíme jako parametr t .

1. Z první rovnice $x + 2y - z + 5 = 0$ vyjádříme jednu proměnnou, například x :

$$x = -2y + z - 5.$$

2. Dosadíme x do druhé rovnice $3x - y + 2z - 2 = 0$:

$$3(-2y + z - 5) - y + 2z - 2 = 0.$$

$$-6y + 3z - 15 - y + 2z - 2 = 0.$$

$$-7y + 5z - 17 = 0.$$

Odtud vyjádříme y :

$$y = \frac{5z - 17}{7}.$$

3. Zvolíme $z = t$ jako parametr. Pak:

$$y = \frac{5t - 17}{7}, \quad x = -2y + z - 5.$$

Dosadíme za y :

$$x = -2\left(\frac{5t - 17}{7}\right) + t - 5.$$

$$x = \frac{-10t + 34}{7} + t - 5.$$

$$x = \frac{-10t + 34 + 7t - 35}{7}.$$

$$x = \frac{-3t - 1}{7}.$$

Parametrické vyjádření přímky p je tedy:

$$x = \frac{-3t - 1}{7}, \quad y = \frac{5t - 17}{7}, \quad z = t.$$

Krok 2: Dosazení přímky do roviny α

Rovnice roviny je $2x - 3y + z - 5 = 0$. Dosadíme parametrické vyjádření x, y, z :

$$2\left(\frac{-3t - 1}{7}\right) - 3\left(\frac{5t - 17}{7}\right) + t - 5 = 0.$$

$$\frac{-6t - 2}{7} - \frac{15t - 51}{7} + t - 5 = 0.$$

$$\frac{-6t - 2 - 15t + 51}{7} + t - 5 = 0.$$

$$\frac{-21t + 49}{7} + t - 5 = 0.$$

$$-3t + 7 + t - 5 = 0.$$

$$-2t + 2 = 0.$$

$$t = 1.$$

Krok 3: Zjištění bodu průsečíku

Dosadíme $t = 1$ do parametrických rovnic přímky:

$$x = \frac{-3(1) - 1}{7} = \frac{-4}{7}, \quad y = \frac{5(1) - 17}{7} = \frac{-12}{7}, \quad z = 1.$$

Bod průsečíku je:

$$P\left(\frac{-4}{7}, \frac{-12}{7}, 1\right).$$

Výsledek

Přímka p a rovina α **se protínají** v bodě $P\left(\frac{-4}{7}, \frac{-12}{7}, 1\right)$.

Copilot řešil úlohu v podstatě stejnou metodou hledáním společných bodů (vyjadřování je opět trochu odlišné od našich zvyklostí, ale z hlediska jazykového se vyjadřuje lépe než ChatGPT). Jelikož oba nástroje postupovaly obdobně a došly ke stejnému výsledku, zvyšuje se tím pravděpodobnost, že se bude jednat o správný výsledek.

Nyní se tedy ještě podíváme, jak si s úlohou poradí Gemini. Opět vkládáme stejný prompt jako v předchozích případech.

4.3 Řešení od Gemini

Pro určení vzájemné polohy přímky p a roviny α postupujeme následovně:

1. **Určíme směrový vektor přímky p :** Přímka p je dána jako průsečnice dvou rovin. Její směrový vektor je vektorovým součinem normálových vektorů těchto dvou rovin.
 - Normálový vektor první roviny: $n_1 = (1, 2, -1)$
 - Normálový vektor druhé roviny: $n_2 = (3, -1, 2)$

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

- Směrový vektor s přímky p :

$$\begin{pmatrix} (2)(2) - (-1)(-1) \\ (-1)(3) - (1)(2) \\ (1)(-1) - (2)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ -3 - 2 \\ -1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. **Určíme normálový vektor roviny α :** Z rovnice roviny $2x - 3y + z - 5 = 0$ je normálový vektor $n_\alpha = (2, -3, 1)$.
3. **Zjistíme, zda je přímka p rovnoběžná s rovinou α :** Přímka je rovnoběžná s rovinou, pokud je její směrový vektor kolmý k normálovému vektoru roviny. To ověříme pomocí skalárního součinu:
 - $s \cdot n_\alpha = (3)(2) + (-5)(-3) + (-7)(1) = 6 + 15 - 7 = 14$
 - Protože $s \cdot n_\alpha \neq 0$, přímka p není rovnoběžná s rovinou α , a tedy ji **protíná v jednom bodě**.
4. **Určíme souřadnice průsečíku:** Abychom našli průsečík, musíme nejprve najít parametrické rovnice přímky p . K tomu potřebujeme jeden bod na přímce. Můžeme si zvolit jednu souřadnici (např. $z = 0$) a dosadit ji do rovnic definujících přímku p :

- $x + 2y + 5 = 0$
- $3x - y - 2 = 0$.

Vynásobíme druhou rovnici dvěma: $6x - 2y - 4 = 0$.

Sečteme tuto rovnici s první: $(x + 2y + 5) + (6x - 2y - 4) = 0 \Rightarrow 7x + 1 = 0 \Rightarrow$

$x = -\frac{1}{7}$. Dosadíme $x = -\frac{1}{7}$ do první rovnice: $-71 + 2y + 5 = 0 \Rightarrow$

$2y = \frac{1}{7} - 5 = \frac{1 - 35}{7} = -\frac{34}{7} \Rightarrow y = -\frac{17}{7}$. Bod na přímce p je $P = (-\frac{1}{7}, -\frac{17}{7}, 0)$.

Parametrické rovnice přímky p jsou:

- $x = -\frac{1}{7} + 3t$
- $y = -\frac{17}{7} - 5t$
- $z = 0 - 7t = -7t$

Nyní dosadíme tyto rovnice do rovnice roviny α :

-
- $2(-\frac{1}{7} + 3t) - 3(-\frac{17}{7} - 5t) + (-7t) - 5 = 0$
 - $-\frac{2}{7} + 6t + \frac{51}{7} + 15t - 7t - 5 = 0$
 - $14t + \frac{49}{7} - 5 = 0$
 - $14t + 7 - 5 = 0$
 - $14t + 2 = 0$
 - $14t = -2$
 - $t = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$

Dosadíme hodnotu t zpět do parametrických rovnic přímky p :

- $x = -\frac{1}{7} + 3(-\frac{1}{7}) = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{4}{7}$
- $y = -\frac{17}{7} - 5(-\frac{1}{7}) = -\frac{17}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{12}{7}$
- $z = -7(-\frac{1}{7}) = 1$

Vzájemná poloha přímky p a roviny α je **průsečík**, a to v bodě $P_0 = (-\frac{4}{7}, -\frac{12}{7}, 1)$.

Odpověď: Přímka p protíná rovinu α v jednom bodě, jehož souřadnice jsou $(-\frac{4}{7}, -\frac{12}{7}, 1)$.

4.4 Diskuse

Nástroj Gemini řešil úlohu zpočátku jinou metodou (vyjadřování je přesnější, ale v závěru se taktéž dopustil drobných jazykových nepřesností). K řešení použil odlišný matematický aparát i jinou filozofii. Vzájemnou polohu v podstatě určil velmi rychle s využitím vektorového a skalárního součinu, na základě čehož konstatoval, že přímka protíná rovinu v jednom bodě. Tím, že i dopočítal souřadnice tohoto bodu, můžeme porovnat tento výsledek s předchozími výsledky nástrojů ChatGPT a Copilot a opět se jedná o stejný průsečík.

Než si podrobněji za pomoci zmíněných matematických nástrojů ověříme správnost řešení, stojí zde za zmínku jedna věc. S výjimkou první části u nástroje Gemini byly další kroky stejné u všech tří nástrojů. Ve všech případech se snažily tyto nástroje vyřešit zadaný problém vzájemné polohy přímky a roviny hledáním společného bodu, což je jedna z možností, jak problém vyřešit, ale je zajímavé, že všechny tři nástroje

postupovaly shodně zbytečně složitější metodou převedení neparametrického vyjádření přímky na parametrické. Za úvahu stojí i metoda převedení obou podprostorů na parametrické vyjádření. Zde by se následně pro určení vzájemné polohy mohl uplatnit např. i další součin vektorů, a to smíšený součin.

Nicméně pokud by tyto nástroje AI použily zadání přímky neparametricky přímo tak, jak bylo uvedeno v zadání, společný bod (průsečík) by se vypočítal přímo ze soustavy zadaných tří rovnic o třech neznámých, což by bylo asi nejrychlejší.

Zkusíme tuto soustavu zadat například nástroji Gemini.

Příslušný prompt:

„Vyřeš soustavu rovnic:

$$x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$

Soustavu rovnic vyřešíme metodou eliminace:

1. **Sečteme první a třetí rovnici:** $(x + 2y - z + 5) + (2x - 3y + z - 5) = 0$
 $3x - y = 0$ (Rovnice 4)

2. **Vynásobíme třetí rovnici 2 a přičteme k druhé rovnici:**

$$2(2x - 3y + z - 5) = 4x - 6y + 2z - 10 = 0$$

$$(3x - y + 2z - 2) + (-4x + 6y - 2z + 10) = 0$$

$$-x + 5y + 8 = 0$$
 (Rovnice 5)

3. **Vyřešíme soustavu rovnic 4 a 5:**

Z rovnice 4 vyjádříme y : $y = 3x$

Dosadíme do rovnice 5: $-x + 5(3x) + 8 = 0$

$$-x + 15x + 8 = 0$$

$$14x = -8$$

$$x = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$$

4. **Dosadíme hodnotu x zpět do rovnice $y = 3x$:**

$$y = 3\left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{12}{7}$$

5. Dosadíme hodnoty x a y do první rovnice pro z :

$$\left(-\frac{4}{7}\right) + 2\left(-\frac{12}{7}\right) - z + 5 = 0$$

$$-\frac{4}{7} - \frac{24}{7} - z + 5 = 0$$

$$-\frac{28}{7} - z + 5 = 0$$

$$-4 - z + 5 = 0$$

$$1 - z = 0$$

$$z = 1$$

Řešení soustavy rovnic je:

$$x = -\frac{4}{7}$$

$$y = -\frac{12}{7}$$

$$z = 1$$

Výsledné hodnoty představují souřadnice společného bodu přímky i roviny. Existence průsečíku tedy svědčí o tom, že přímka rovinu protíná (jsou různoběžné).

Je zvláštní, že ani jeden nástroj tento společný bod neřešil přímo pomocí zadaných rovnic (tj. využitím neparametrického vyjádření přímky) a vždy se snažily si zadanou přímku převést na parametrické vyjádření, což je zbytečný mezikrok při řešení tohoto problému.

4.5 Ověření správnosti řešení matematickými SW

Dostali jsme tři řešení od tří různých AI nástrojů. Tato řešení se ve finále shodují, takže bychom mohli dodané řešení považovat za správné, ale přesto provedeme ověření některými matematickými nástroji, které jsme si zde zmínili.

Použijeme nástroje od společnosti Wolfram Research, které jsou dostupné online, jako jsou Wolfram Alpha či Wolfram Cloud. Teoreticky bychom mohli očekávat, že AI nástroje využívají těchto online matematických SW, proto byl např. na ChatGPT vznesen dotaz s následujícím promptem:

„Jakým způsobem řešíš matematické úlohy? Jak víš, jaký matematický aparát použít? Využíváš některé online matematické SW?“

Odpověď:

Řeším matematické úlohy kombinací několika přístupů:

1. **Analytické myšlení a pravidla matematiky** – Mám rozsáhlé znalosti matematiky, takže volím správný matematický aparát na základě typu úlohy. Například:
 - Rovnice řeším algebraickými metodami (substituce, sčítací metoda atd.).
 - Limity a derivace používám pro analýzu funkcí.
 - Matrice a vektory aplikuji v lineární algebře.
 2. **Automatická detekce metody** – Pokud úloha odpovídá běžnému vzoru, mohu automaticky zvolit nejvhodnější metodu, například pro kvadratické rovnice ihned použiji vzorec pro kořeny.
 3. **Symbolické výpočty** – Pro složitější výpočty používám Python a knihovnu SymPy (v interním prostředí), která umožňuje manipulaci s výrazy, derivace, integrace apod.
 4. **Numerické metody** – Pokud je třeba aproximace, využívám numerické metody (Newtonova metoda, Monte Carlo atd.).
 5. **Nejsem připojen k externím matematickým softwarům** jako Wolfram Alpha nebo MATLAB, ale mohu provádět podobné výpočty interně.
-

Nyní tedy přistoupíme k řešení zadané úlohy vybranými matematickými SW.

4.5.1 Řešení pomocí Wolfram Alpha

Díky tomu, že je Wolfram Alpha výpočetní znalostní engine (tj. kombinuje informace z databází, analyzuje je a provádí na nich požadované výpočty), umožňuje zadávání matematických dotazů v přirozeném jazyce nebo pomocí matematických výrazů.

Budeme-li chtít stejně jako nástroje AI vyřešit vzájemnou polohu přímky a roviny hledáním společných bodů, přistoupíme k tomuto problému stejně, ale na rozdíl od nástrojů AI zadáme nástroji Wolfram Alpha přímo vyřešení soustavy rovnic v zadaném tvaru, tj. neparametricky.

Na to, ak zadat matematicky v jazyce Wolfram vyřešení soustavy rovnic, se zeptáme nástroje ChatGPT:

Prompt: „Jak řešit vzájemnou polohu přímky p a roviny α ve Wolfram Alpha?

$$p: x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Odpověď:

Ve **Wolfram Alpha** můžete analyzovat vzájemnou polohu přímky p a roviny α zadáním rovnic a použitím klíčových slov jako „**intersection**“ nebo „**solve**“.

Krok 1: Definujte rovnice

Máme přímku p danou soustavou dvou rovnic:

$$p: x + 2y - z + 5 = 0$$

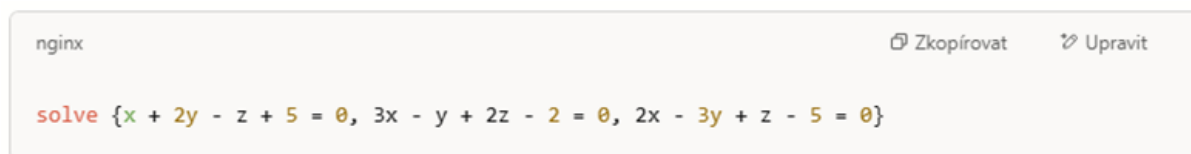
$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

A rovinu α :

$$\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Krok 2: Použití Wolfram Alpha

Ve Wolfram Alpha napište dotaz:



Co se stane?

- Pokud má soustava **jediné řešení**, znamená to, že **přímka protíná rovinu v jednom bodě**.
 - Pokud vede na **rozpor (nesplnitelné rovnice)**, přímka **leží v rovnoběžné rovině a nemá s ní společný bod**.
 - Pokud se soustava **redukuje na dvě závislé rovnice**, znamená to, že **přímka leží v rovině α** .
-

Nyní zadáme nabízený příkaz do vstupního pole ve Wolfram Alpha:

The screenshot shows the Wolfram Alpha website. At the top, it says "FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA" and the "WolframAlpha" logo. Below the logo is a search bar containing the input: `solve (x + 2y - z + 5 = 0, 3x - y + 2z - 2 = 0, 2x - 3y + z - 5 = 0)`. Below the search bar are two buttons: "NATURAL LANGUAGE" and "MATH INPUT". To the right of these buttons are several icons: a star, a square root symbol, a partial derivative symbol, a double colon symbol, a cube root symbol, a subscript symbol, and an ellipsis. Below the search bar is a section titled "Input interpretation" which shows the three equations in a table: $x + 2y - z + 5 = 0$, $3x - y + 2z - 2 = 0$, and $2x - 3y + z - 5 = 0$. Below this table is a "Result" section which shows the solution: $x = -\frac{4}{7}$ and $y = -\frac{12}{7}$ and $z = 1$. To the right of the result are two buttons: "Approximate form" and "Step-by-step solution". At the bottom right of the result section, it says "POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE".

Obrázek 1: Řešení ve Wolfram Alpha – nalezení společného bodu přímky a roviny

Získali jsme jednoznačné řešení souřadnic jednoho konkrétního bodu (jediné řešení), tj. dle nabízené interpretace výsledku z toho plyne závěr, že přímka protíná rovinu v jednom bodě. Souřadnice tohoto bodu korespondují se souřadnicemi, které jsme získali od všech použitých nástrojů AI, čímž jsme ověřili správnost jejich řešení.

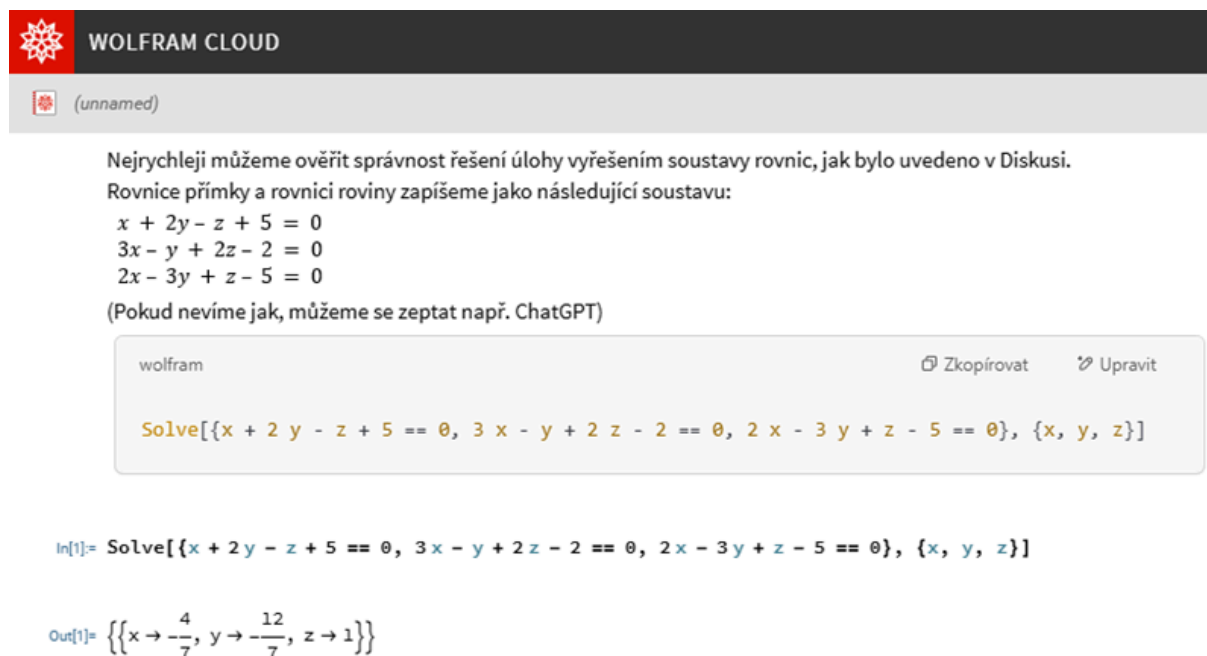
Jelikož ve Wolfram Alpha nelze graf přímky vykreslit přímo z jejího implicitního vyjádření soustavou rovnic (muselo by se nejprve převést na parametrické vyjádření) a stejně tak je pro tento nástroj problematické vykreslení dvou grafických interpretací do jednoho obrázku, použijeme k vizualizaci jiné nástroje a vzájemnou polohu si ukážeme v silnějším nástroji Wolfram Cloud a také v GeoGebře, kde jsou tyto vizualizace nejsnazší.

4.5.2 Řešení pomocí Wolfram Cloud

Wolfram Cloud je cloudová platforma, která vyžaduje zadávání příkazů jazykem Wolfram Language stejně jako desktopová verze Wolfram Mathematica. Je to velmi sofistikovaný nástroj, který dokáže řešit různě složité problémy, ale jeho omezením by mohla být právě znalost syntaxe Wolfram Language. Tento problém dnes ovšem

řeší nástroje AI, které nám mohou pomoci na základě správných promptů připravit potřebný kód ve Wolfram Language.

Pomocí svého Wolfram ID se přihlásíme do Wolfram Cloud a můžeme začít řešit zadaný problém.



The screenshot shows the Wolfram Cloud interface. At the top is the Wolfram Cloud logo and a tab labeled '(unnamed)'. Below the tab, there is a text input area containing the following text:

Nejrychleji můžeme ověřit správnost řešení úlohy vyřešením soustavy rovnic, jak bylo uvedeno v Diskusi.
Rovnice přímky a rovnici roviny zapíšeme jako následující soustavu:

$$\begin{aligned}x + 2y - z + 5 &= 0 \\ 3x - y + 2z - 2 &= 0 \\ 2x - 3y + z - 5 &= 0\end{aligned}$$

(Pokud nevíme jak, můžeme se zeptat např. ChatGPT)

Below the text input area is a code input area with the Wolfram code:

```
Solve[{x + 2 y - z + 5 == 0, 3 x - y + 2 z - 2 == 0, 2 x - 3 y + z - 5 == 0}, {x, y, z}]
```

Below the code input area is the output of the code:

```
In[1]:= Solve[{x + 2 y - z + 5 == 0, 3 x - y + 2 z - 2 == 0, 2 x - 3 y + z - 5 == 0}, {x, y, z}]
```

Out[1]:= $\left\{\left\{x \rightarrow -\frac{4}{7}, y \rightarrow -\frac{12}{7}, z \rightarrow 1\right\}\right\}$

Obrázek 2: Řešení ve Wolfram Cloud – výpočet průsečíku

Tím jsme opět ověřili správnost výpočtu generovaných nástroji AI.

Součástí zadání úlohy byl i požadavek: „vhodným nástrojem proveďte vizualizaci tohoto případu“. Pro vizualizace geometrických úloh je velmi vhodným nástrojem GeoGebra, ale nástroje společnosti Wolfram standardně zvládají vykreslování grafů a jiné vizualizace matematických konceptů, proto si to ukážeme i na této platformě Wolfram Cloud. Za pomoci AI nástrojů si necháme poradit, jak zadat dle našich rovnic přímku a rovinu a vykreslit jejich grafické interpretace současně do jednoho grafu.



Pro vizualizaci vzájemní polohy zadáme zvlášť předpis pro rovinu a předpis pro přímku.

$$\alpha: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

$$p: x + 2y - z + 5 = 0$$

$$3x - y + 2z - 2 = 0$$

Pro vykreslení společného grafu obou těchto geometrických útvarů si necháme opět poradit od ChatGPT:

```

mathematica
(* Rovnice roviny *)
plane = 2 x - 3 y + z == 0;

(* Soustava rovnic pro přímku *)
line = {x + 2 y - z + 5 == 0, 3 x - y + 2 z - 2 == 0};

(* Najdeme parametrizaci přímky - vyjádříme x, y v závislosti na parametru t (volíme z = t) *)
parametricSol = Solve[line, {x, y}][[1]];
lineParametric = {x, y, z} /. parametricSol /. z -> t;

(* Vykreslení přímky jako parametrické křivky *)
lineCurve = ParametricPlot3D[
  lineParametric, {t, -10, 10}, PlotStyle -> {Thick, Red}];

(* Vykreslení roviny jako povrchu *)
planeSurface = Plot3D[2 x - 3 y, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  PlotStyle -> Opacity[0.5, Blue]];

(* Zobrazení výsledného grafu *)
Show[planeSurface, lineCurve, Boxed -> False, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}]
```

```

In[1]:= plane = 2 x - 3 y + z == 0;

In[2]:= line = {x + 2 y - z + 5 == 0, 3 x - y + 2 z - 2 == 0};

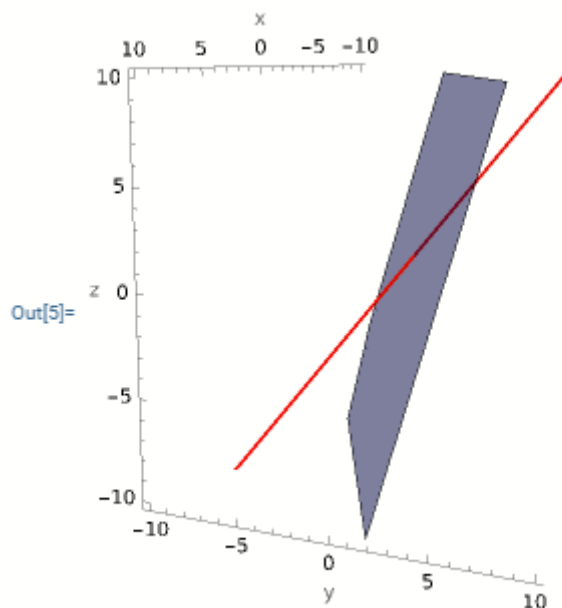
In[3]:= parametricSol = Solve[line, {x, y}][[1]];
lineParametric = {x, y, z} /. parametricSol /. z -> t;

lineCurve = ParametricPlot3D[
  lineParametric, {t, -10, 10}, PlotStyle -> {Thick, Red}];

In[13]:= planeSurface = Plot3D[2 x - 3 y, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  PlotStyle -> Opacity[0.5, Blue]];

In[16]:= Show[planeSurface, lineCurve, Boxed -> False, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  Ticks -> Automatic, ImageSize -> Large, ViewVertical -> {0, 0, 1}]
```

Obrázek 3: Zadání příkazů pro vizualizaci vzájemné polohy zadané přímky a roviny



Obrázek 4: Grafická interpretace zadané úlohy ve Wolfram Cloud
(vizualizace vzájemné polohy zadané přímky a roviny)

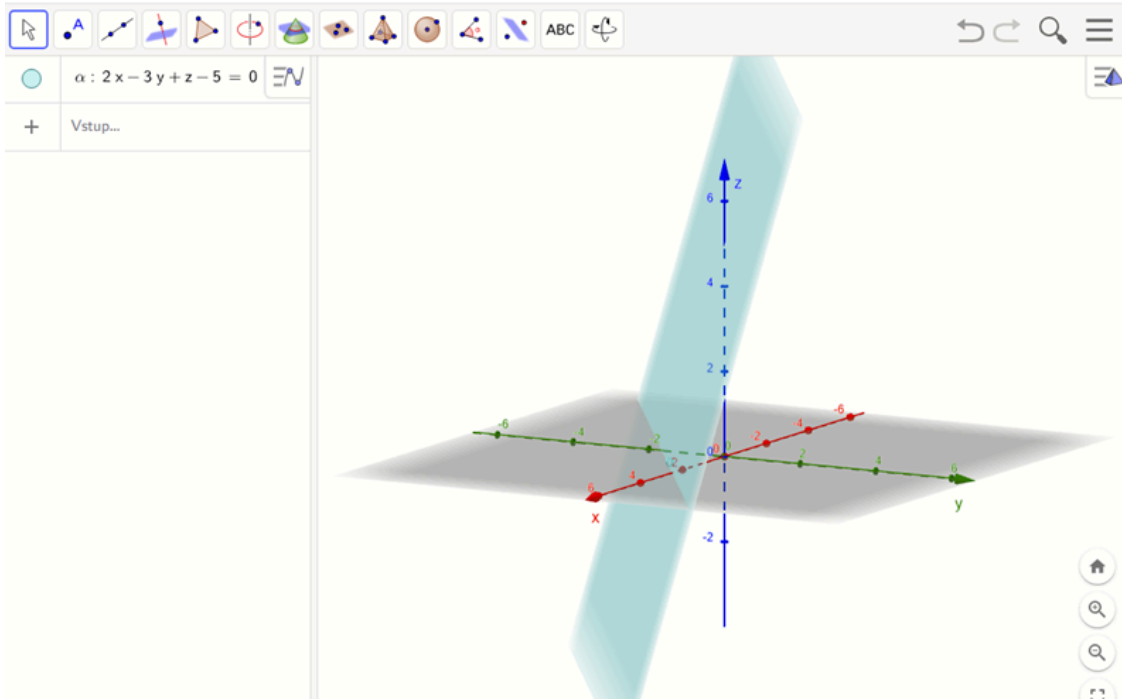
Na základě grafické interpretace jsme si i vizuálně potvrdili správnost řešení zadané úlohy, tj. přímka a rovina jsou navzájem různoběžné.

Nyní si tuto vizualizaci vytvoříme ještě pomocí SW GeoGebra.

4.5.3 Řešení pomocí SW GeoGebra

SW GeoGebra je bezplatný nástroj, který je především interaktivní a dynamický, proto je velmi vhodný pro vizualizace, které lze velmi snadno modifikovat změnou vstupních parametrů. Umožňuje nejen vizualizace matematických konceptů a manipulaci s objekty, ale umí i řešit rovnice, vykreslovat grafy a mnoho dalšího. Díky intuitivnímu ovládání je uživatelsky přívětivější než např. nástroje Wolfram, ale také vlivem mnoha funkcí je vhodné kombinovat jeho užití s nástroji AI, které nám mohou dle potřeby poradit, jak daný problém do tohoto SW zadat.

Zadat rovinu danou obecnou rovnicí není problém, rovnici přímo zapíšeme do vstupního řádku: $2x - 3y + z - 5 = 0$.



Obrázek 5: Zadaná rovina α v GeoGebra 3D

Pro zadání přímky jako soustavy rovnic se zeptáme např. ChatGPT:

Prompt: „*Jak v GeoGebře zadat přímku danou implicitně soustavou rovnic:*

$x + 2y - z + 5 = 0$, $3x - y + 2z - 2 = 0$ “

Odpověď:

V GeoGebře můžete přímku danou soustavou dvou rovnic zadat jednoduše pomocí nástroje PrunikovaCara. Postupujte takto:

Postup:

1. Otevřete GeoGebru 3D (např. GeoGebra 3D Calculator).
2. Zadejte rovnice rovin do vstupního řádku:

ini
Zkopírovat
Upravit

$$r1 = x + 2y - z + 5 = 0$$

$$r2 = 3x - y + 2z - 2 = 0$$

To vytvoří dvě roviny v prostoru.

3. Najděte jejich průnikovou přímku pomocí příkazu:

SCSS

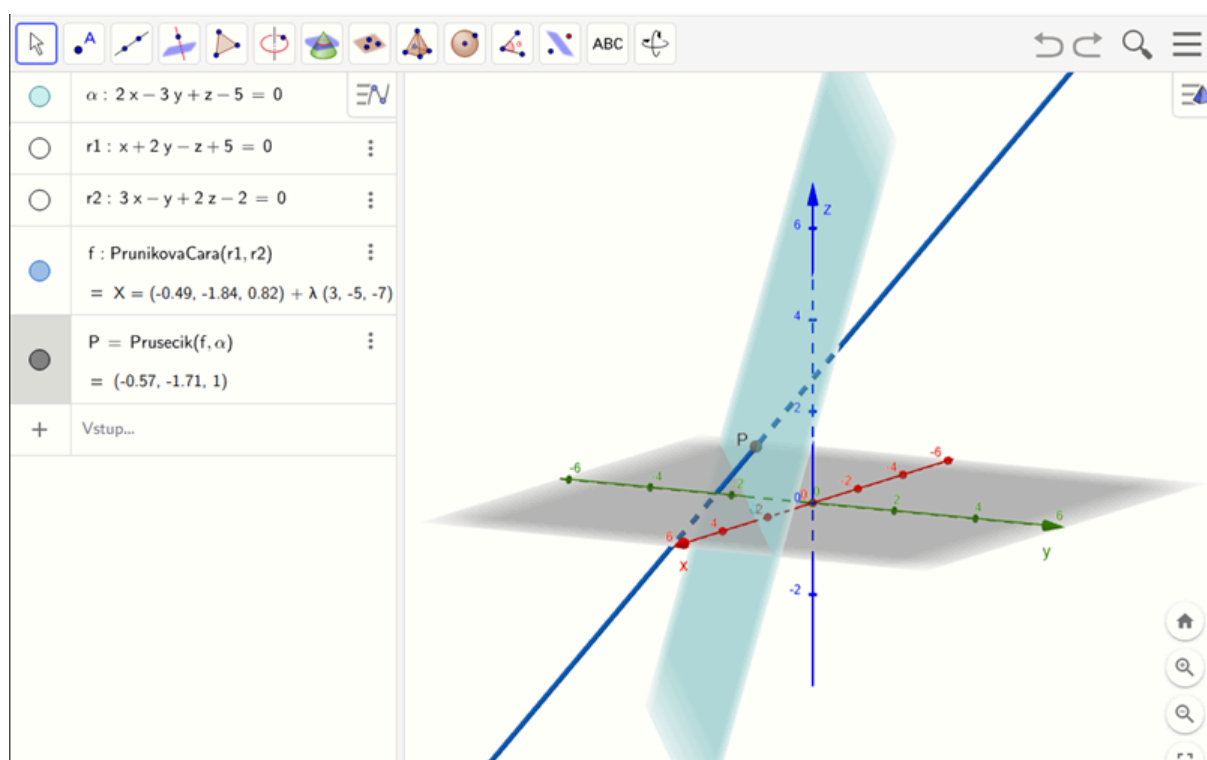
Zkopírovat

Upravit

PrunikovaCara(r1, r2)

Tento příkaz automaticky vykreslí přímku jako průnik zadaných rovin.

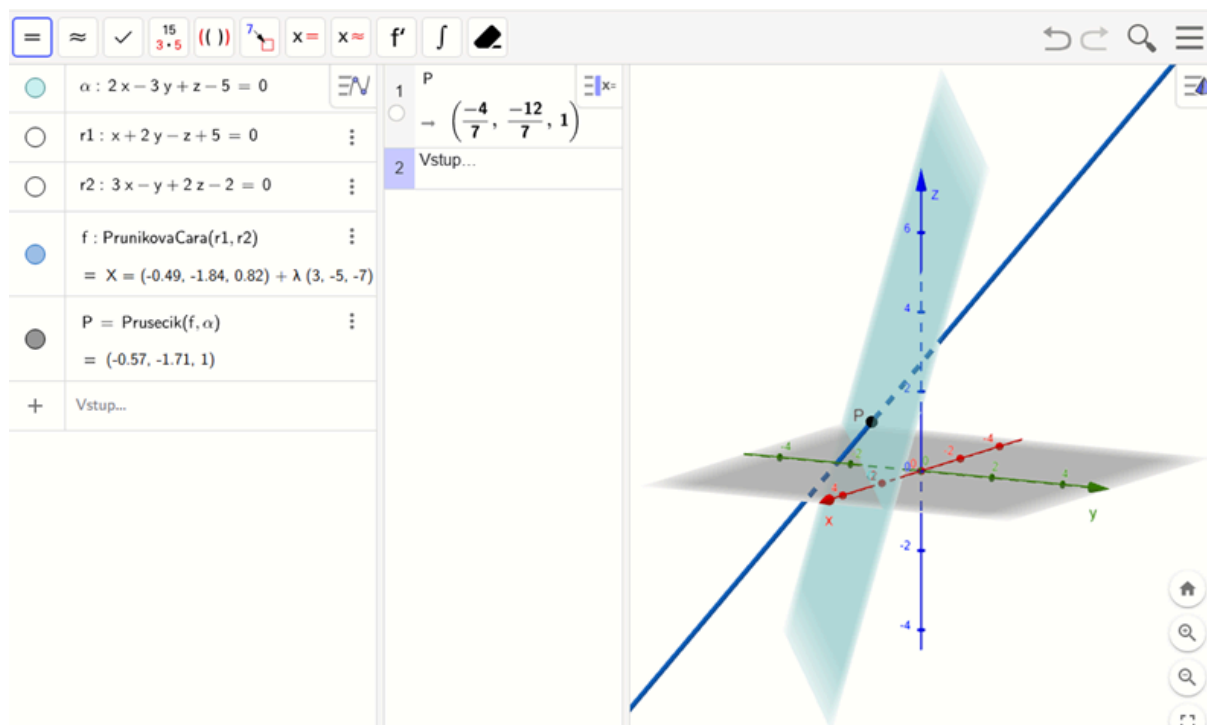
Zadáme tímto způsobem do GeoGebry, necháme zobrazenou pouze zadanou rovinu a výslednou přímku. Dodatečně si ještě necháme zobrazit průsečík přímky a roviny.



Obrázek 6: *Kompletní vizualizace zadané úlohy v GeoGebra 3D
(vzájemná poloha zadané přímky a roviny)*

Touto vizualizací jsme si opět potvrdili řešení zadané úlohy, tj. že zadaná přímka a zadaná rovina jsou navzájem různoběžné. Důsledkem toho je existence průsečíku, což byla metoda řešení této vzájemné polohy u všech zvolených AI nástrojů (hledání

společných bodů). Zde v GeoGebře máme průsečík přímky a roviny uveden jako bod $P = (-0.57, -1.71, 1)$. Jelikož GeoGebra řeší rovnice či soustavy rovnic numericky a výsledné hodnoty udává v Algebraickém okně v desetinných číslech dle nastaveného počtu desetinných míst, necháme si zobrazit ještě okno CAS, kde GeoGebra užívá symbolických výpočtů. Zde si necháme převzít z Algebraického okna hodnoty souřadnic bodu P a budeme je mít zobrazeny ve zlomcích, což můžeme lépe porovnat s výsledky dodanými od nástrojů AI.



Obrázek 7: CAS okno v GeoGebře se souřadnicemi průsečíku P zadané přímky a zadané roviny



Otázky k zamyšlení:

- Jaký byl rozdíl mezi výstupy jednotlivých nástrojů AI (ChatGPT, Copilot, Gemini)? Jak mohou různé nástroje AI ovlivnit výsledek a přístup k řešení daného problému?
- Jak nám pomohly matematické SW k ověření správnosti výsledku od AI? Lišila se aplikace Wolfram Alpha, Wolfram Cloud a GeoGebra na řešení zadané úlohy?
- Byl některý matematický SW vhodnější než jiný? A jak nám pomohla AI s aplikací těchto matematických SW?
- Byla nějaká omezení v užitých matematických SW při vizualizaci zadané úlohy?

- Byl by problém v řešení dané úlohy nějakou jinou metodou, např. uplatněním smíšeného součinu vektorů užitím zvolených matematických SW, nebo díky pomoci AI bychom mohli postupovat analogicky?
- Má význam ověřovat si výstupy generované AI pomocí matematických SW či jinak i na základě ukázky, která ukázala, že nástroje AI došly ke správnému závěru?



Úlohy k procvičování:

- Uvedená úloha byla polohová, proto si obdobným způsobem zkuste vyřešit pro změnu úlohu metrickou, např. určení vzdálenosti dvou přímk. Postupujte analogicky: Využijte nástrojů AI k vyřešení dané úlohy, každé řešení podrobte diskusi a následně porovnejte řešení od všech nástrojů AI. Poté úlohu řešte matematickými SW a výsledek konfrontujte s výsledky od AI.
Zadání úlohy: Určete vzdálenost mimoběžných přímek p a q .

$$\begin{aligned} p: x + 2y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q: x + y - 6 &= 0 \\ z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

- K procvičení problematiky z matematické analýzy provedte potřebné kroky nutné k sestavení průběhu funkce (tj. vykreslení grafu funkce). Připomeňme si kroky, které v sobě tato úloha skrývá: stanovení definičního oboru funkce, nalezení průsečíků grafu funkce s jednotlivými osami, pro určení lokálních extrémů využijete hledání stacionárních bodů pomocí první a druhé derivace funkce. Druhou derivaci využijete taktéž při hledání inflexních bodů pro přechod mezi konkávní a konvexní částí grafu funkce. Dále určete asymptoty (existují-li) a limity v nevlastních bodech (popř. bodech nespojitosti, existují-li).

Zadání úlohy: Zakreslete průběh funkce: $f(x) = x^2 \sqrt{e^x}$

- Dále si můžete sami volit různé úlohy z různých oblastí matematiky a analogickým postupem řešit úlohy prostřednictvím nástrojů AI a konfrontovat výsledky pomocí matematických SW. Pozorujte, jak každý nástroj AI řeší daný problém, který je přesnější (dává hned správný výsledek) a kterému musíte pomoci upřesněním promptu či poukázáním na chybu a navedením na některou správnou cestu. Stejně tak si vyzkoušíte různé matematické SW a naleznete si pro sebe vhodné nástroje pro určité typy úloh.

Závěr

Závěrem tedy po ověření různými sofistikovanými matematickými nástroji můžeme konstatovat, že vybrané nástroje AI zadanou úlohu vyřešily správně. Tento závěr ovšem nemůžeme generalizovat a na základě jednoho příkladu vždy automaticky přijímat řešení od AI jako správné. Je potřeba mít určitý nadhled, přistupovat k výstupům kriticky a umět si je podle potřeby ověřit. Zároveň jsme si ukázali, že není potřeba využít AI pro řešení úlohy zcela autonomně, ale i při užívání sofistikovaných matematických SW nám může být AI dobrým pomocníkem. Užívání matematických SW nemusí být vždy uživatelsky nejpřívětivější a ne vždy známe syntax jazyka, se kterým konkrétní matematický SW pracuje. S tím nám může AI efektivně pomoci a přípravu vstupních příkazů ulehčit.

Shrňme-li závěry tohoto metodického materiálu, tak se nejedná jen o ukázkou nějakého konkrétního užití na konkrétní úlohu, ale teoretická část představuje i ucelený pohled na možnosti integrace AI nástrojů do matematického vzdělávání. Cílem bylo poukázat na možnosti, jak může umělá inteligence podpořit pedagogy při přípravě na výuku i studenty v jejich vlastním procesu učení, a to jak při řešení konkrétních matematických úloh, tak při vizualizaci různých matematických konceptů. Důležité je mít na paměti limity nástrojů AI a k výstupům stále přistupovat kriticky. Je to poměrně nová technologie, která se bude postupem času vyvíjet a bude stále spolehlivější, ale stejně jako chybují lidé, možná i zde bude vždy tento negativní potenciál chybovosti.

I když je materiál primárně určen studentům matematických oborů na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, kteří se tak mohou seznámit s inovativními metodami a moderními technologiemi, jež lze využít jak při studiu, tak následně také během budoucí pedagogické praxe, je vzhledem ke své povaze obecně použitelný pro každého současného pedagoga či studenta připravujícího se na budoucí pedagogickou dráhu. V konečném důsledku má tento metodický materiál přispět k rozvoji matematické gramotnosti studentů a k inovaci výuky matematiky na vysoké škole připravující budoucí učitele matematiky.

Použité a doporučené zdroje

Citováno dle normy ČSN ISO 690:2022 (harvardský systém)

BÁRTEK, K. a kol., 2024. Od jednoduchých úloh k problémům reálného světa: Umělá inteligence a její možnosti v řešení logických úloh. *Elementary Mathematics Education Journal*, 6(2). 6–13.

CENTRUM PREVENCE RIZIKOVÉ VIRTUÁLNÍ KOMUNIKACE, 2025. *Umělá inteligence* [online]. Dostupné z: <https://ai.e-bezpeci.cz/>

DESMOS STUDIO, 2025. *Desmos: Beautiful free math* [online]. Dostupné z: <https://www.desmos.com/>

GEOGEBRA, 2025. *GeoGebra nástroje a materiály: Vyučujte a uče se matematiku chytře* [online]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/>

GOOGLE, 2025. *Google Gemini* [online]. Dostupné z: <https://gemini.google.com>

KOPECKÝ, K. a kol., 2023. *České školy a umělá inteligence – výzkumná zpráva*. Olomouc: Centrum prevence rizikové virtuální komunikace PdF UP.

KOPECKÝ, K. a kol., 2024-2025. *Základy umělé inteligence*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

MICROSOFT, 2025. *Math Solver* [online]. Dostupné z: <https://mathsolver.microsoft.com/>

MICROSOFT, 2025. *Microsoft Copilot* [online]. Dostupné z: <https://www.microsoft.com/cs-cz/microsoft-copilot/>

OPEN AI, 2025. *ChatGPT* [online]. Dostupné z: <https://chatgpt.com>

RICHARD, P. R., VÉLEZ, M. P. a VAERENBERGH, S. V. (Eds.), 2022. *Mathematics Education in the Digital Era: How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning*. Cham: Springer. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>

SCIO, 2025. *ScioBot* [online]. Dostupné z: <https://sciobot.cz/>

UNESCO, 2019. *Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities for Sustainable Development* [online]. Dostupné z: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000366994>

UNESCO., 2021. *AI and Education: Guidance for Policy Makers* [online]. Dostupné z: <https://doi.org/10.54675/PCSP7350>

VAŠKO, J., PASTOR, K., & BÁRTEK, K., 2021. WolframAlpha jako pomocný nástroj učitele a žáka. *Elementary Mathematics Education Journal*, 3(2), 48–53.

WOLFRAM, 2025. *Wolfram|Alpha: Computational Intelligence* [online]. Dostupné z: <https://www.wolframalpha.com/>

WOLFRAM, C., 2020. *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age*. Champaign: Wolfram Media.

WOLFRAM RESEARCH, 2025. *Wolfram Cloud* [online]. Dostupné z: <https://www.wolframcloud.com/>

WOSSALA, J., 2023. Zásada názornosti v matematice s využitím programu GeoGebra. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 77–86.